CONCOURS D'ADMISSION À L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1987 — CONCOURS SCIENCES

MATHÉMATIQUES II — Option M — DURÉE : 4 heures

Dans l'appréciation des copies, il sera tenu compte de la rigueur des raisonnements et de la précision de la rédaction, mais aussi de la PRÉSENTATION, *de la* LISIBILITÉ *et de l'*ORTHOGRAPHE.

● *Le candidat pourra, à condition de l'indiquer clairement, admettre un résultat afin de traiter les questions suivantes.*

● *La résolution du problème ne nécessite pas l'usage d'une calculatrice.*

NOTATIONS :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}_n$ désigne l'ensemble $\{ 1, 2, ..., n \}$.

$\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}^*$, désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{C}$; on note O_n la matrice nulle et I_n la matrice unité de cette algèbre.

Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathfrak{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E.

e étant une base de E et u un élément de $\mathfrak{L}(E)$, on note $M(u, e)$ la matrice de u dans la base e.

Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on note :

$A = [a_{ij}]$, où a_{ij} est l'élément de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne ;

rg A le rang de A; det A le déterminant de A;

Sp (A) l'ensemble des valeurs propres de A;

${}^tA$ la matrice transposée de A.

On note, si $(A_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2}$ est une famille de n^2 matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

la matrice d'ordre n^2 obtenue en remplaçant les A_{ij} par leurs éléments (décomposition de A en n^2 blocs carrés d'ordre n).

RAPPELS :

Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, on note E_{ij} la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf l'élément a_{ij} de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne qui vaut 1 (en notant $E_{ij} = [a_{pq}]$, $a_{pq} = \delta_{pi} \times \delta_{qj}$, δ indice de Kronecker).

La famille $(E_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2}$ est une base de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

Si A est une matrice de $\mathfrak{M}_{n^2}(\mathbb{C})$ dont la décomposition par blocs carrés d'ordre n est :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

avec $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, $i > j \Rightarrow A_{ij} = O_n$,

alors : $\det A = \prod_{i=1}^{n} \det A_{ii}$

(A est alors dite matrice bloc-triangulaire).

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

Tournez la page S. V. P.

PRÉLIMINAIRES.

1. Soit $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}'$) la relation binaire définie sur $\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n$ par :

$$(i, j)\ \mathcal{R}\ (k, l) \Leftrightarrow (i < k \quad \text{ou} \quad (i = k \quad \text{et} \quad j \leqslant l))$$

$$(\text{resp. } (i, j)\ \mathcal{R}'\ (k, l) \Leftrightarrow (j < l \quad \text{ou} \quad (j = l \quad \text{et} \quad i \leqslant k))).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}'$) est une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n$.

On notera e (resp. e') la base de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ constituée de la famille $(E_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2}$ ordonnée à l'aide de la relation $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}'$) ; c'est-à-dire :

$$e = (E_{11} ; E_{12} ; \ldots ; E_{1n} ; E_{21} ; \ldots ; E_{2n} ; \ldots ; E_{n1} ; \ldots ; E_{nn})$$

$$e' = (E_{11} ; E_{21} ; \ldots ; E_{n1} ; E_{12} ; \ldots ; E_{n2} ; \ldots ; E_{1n} ; \ldots ; E_{nn}).$$

2. Montrer que $\forall (i, j, k, l) \in \mathbb{N}_n^4,\ E_{ij} \times E_{kl} = \delta_{jk} \times E_{il}$.

3. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $(u, v) \in \mathcal{L}^2(E)$ fixé et $\mathcal{A}_{(u, v)} = \{u \circ f \circ v,\ f \in \mathcal{L}(E)\}$.

   a. Montrer que $\mathcal{A}_{(u, v)}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

   b. Montrer que, pour tout φ de $\mathcal{L}(E)$,

$$\varphi \in \mathcal{A}_{(u, v)} \Leftrightarrow (\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} \varphi \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \varphi \subset \operatorname{Im} u).$$

   (On rappelle qu'un endomorphisme f de E est parfaitement déterminé par la donnée des vecteurs d'une base de E et de leurs images par f.)

   c. Soit F un supplémentaire de $\operatorname{Ker} v$ dans E. Montrer que les espaces vectoriels $\mathcal{A}_{(u, v)}$ et $\mathcal{L}(F, \operatorname{Im} u)$ sont isomorphes.

   En déduire $\dim \mathcal{A}_{(u, v)}$.

Pour tout couple (A, B) de $\mathfrak{M}_n^2(\mathbb{C})$, on pose :

$$f_{(A, B)} : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$$
$$X \to A X {}^t B$$

1. Montrer que $f_{(A, B)}$ est linéaire.

2. Montrer que l'application $(A, B) \to f_{(A, B)}$ est bilinéaire de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{L}(\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}))$ et que :

$$\forall (A, B, C, D) \in \mathfrak{M}_n^4(\mathbb{C}),\ f_{(A, B)} \circ f_{(C, D)} = f_{(AC, BD)}.$$

3. En utilisant I.3, montrer que $\operatorname{rg} f_{(A, B)} = \operatorname{rg} A \cdot \operatorname{rg} B$.

   Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A et B pour que $f_{(A, B)}$ soit bijectif. Indiquer dans ce cas l'expression de $f^{-1}_{(A, B)}$. À quelle condition $f_{(A, B)}$ est-il nul ?

4. Soit $(p, q, r, s) \in \mathbb{N}_n^4$.

   a. Montrer que $\operatorname{rg} f_{(E_{pq}, E_{rs})} = 1$.

   b. Montrer que E_{pr} est une base de $\operatorname{Im} f_{(E_{pq}, E_{rs})}$.

   c. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $M = [m_{ij}]$. Calculer $f_{(E_{pq}, E_{rs})}(M)$.

Tournez la page S. V. P.

d. Montrer que : $f_{(E_{pq}, I_n)} \circ f_{(A, B)} \circ f_{(E_{rs}, I_n)} = \lambda f_{(E_{ps}, B)}$

où λ est un complexe que l'on explicitera en fonction des éléments de la matrice $A = [a_{ij}]$.

5. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_p, B_1, B_2, \ldots, B_p$, $2p$ éléments de $\mathfrak{M}_n(C)$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $f = \sum_{k=1}^{p} f_{(A_k, B_k)}$.

a. On suppose que les p matrices $B_1, B_2, \ldots, B_p$ sont linéairement indépendantes. En utilisant ce qui précède, montrer que f est l'application nulle si et seulement si, pour tout indice k de $\mathbb{N}_p$,

$$A_k = O_n.$$

b. Établir un résultat analogue en supposant maintenant que les p matrices $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sont linéairement indépendantes.

6. Montrer que la famille $(f_{(E_{ij}, E_{kl})})_{(i,j,k,l) \in \mathbb{N}_n^4}$ est une base de $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}_n(C))$.

7. Soit $f \in \mathfrak{L}(\mathfrak{M}_n(C))$, f non nul, et $\mathcal{O}_f$ l'ensemble des systèmes $(A_1, A_2, \ldots, A_p, B_1, B_2, \ldots, B_p)$ d'éléments non nuls de $\mathfrak{M}_n(C)$ tels que : $f = \sum_{k=1}^{p} f_{(A_k, B_k)}$.

Une telle relation définit une décomposition de f de longueur p.

a. Montrer que $\mathcal{O}_f$ est non vide.

b. Montrer que f admet une décomposition de longueur minimum μ et que, si $f = \sum_{k=1}^{\mu} f_{(A_k, B_k)}$ est une telle décomposition, alors les μ matrices $A_1, A_2, \ldots, A_\mu$ (resp. $B_1, B_2, \ldots, B_\mu$) sont linéairement indépendantes.

III

Dans cette partie, on se propose de déterminer la matrice de l'application $f_{(A, B)}$ définie dans la partie II et d'en étudier quelques propriétés.

Soit $(A, B) \in \mathfrak{M}_n^2(C)$, $A = [a_{ij}]$; $B = [b_{ij}]$.

1. *a.* Montrer que : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2$, $f_{(A,B)}(E_{ij}) = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}_n^2} a_{\alpha i}\, b_{\beta j}\, E_{\alpha\beta}$.

b. En déduire :

$$M(f_{(A,B)}, e) = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{nn} \end{bmatrix}$$

avec $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2$, $B_{ij} = a_{ij} B$.

On notera $A \otimes B$ cette matrice.

Tournez la page S. V. P.

c. Montrer que $M(f_{(A,B)}, e') = B \otimes A$.

d. Soit $(A, B, C, D) \in \mathfrak{M}_n^4(C)$. Montrer que :

$$(A \otimes B) . (C \otimes D) = (AC) \otimes (BD) .$$

À quelle condition $A \otimes B$ est-elle régulière ? Quelle est alors $(A \otimes B)^{-1}$? Quand a-t-on $A \otimes B = 0$?

e. Soit $(A, B) \in \mathfrak{M}_n^2(C)$. Calculer :

$\det(I_n \otimes A)$, $\det(A \otimes I_n)$ et $\det(A \otimes B)$ en fonction de $\det A$ et $\det B$.

f. On suppose A et B diagonales. Que peut-on dire de $A \otimes B$? En déduire que si A et B sont diagonalisables alors $A \otimes B$ l'est aussi.

2. Soit $(A, B) \in \mathfrak{M}_n^2(C)$.

a. Montrer que si A et B sont triangulaires supérieures, il en est de même de $A \otimes B$. Exprimer les éléments diagonaux de $A \otimes B$ en fonction de ceux de A et B.

b. On pose : $Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, $Sp(B) = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$

les λ_i (resp. les μ_j) n'étant pas nécessairement distincts deux à deux.

Déterminer le polynôme caractéristique de $A \otimes B$ et celui de $(A \otimes I_n + I_n \otimes B)$ en fonction des λ_i et des μ_j.

3. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(C)$ et d_A l'application de $\mathfrak{M}_n(C)$ dans lui-même définie par :

$$\forall X \in \mathfrak{M}_n(C), \quad d_A(X) = AX - XA .$$

a. Vérifier que $M(d_A, e) = A \otimes I_n - I_n \otimes {}^tA$.

On notera D_A cette matrice.

b. Montrer que d_A est nilpotent si et seulement si

Card $Sp(A) = 1$ (c'est-à-dire A admet une valeur propre d'ordre n).

c. On suppose d_A nilpotent. Montrer qu'il existe une matrice N de $\mathfrak{M}_n(C)$ nilpotente telle que :

$$d_A = d_N$$

et

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (D_A)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k (-1)^{p-k} N^k \otimes ({}^tN)^{p-k} .$$

On appelle indice de nilpotence de N l'entier q ($q \geqslant 1$) tel que $N^q = 0$ et $N^{q-1} \neq 0$.

Déterminer l'indice de nilpotence de d_A.

---==OOO==---